PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II DE ANDALUCÍA
CURSO 2002-2003.

Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A del modelo 6 de 2003.

[2'5 puntos] Sea la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y su recta tangente en el punto de abscisa correspondiente al máximo relativo de la función.

Solución

$f(x) = 2x^3 - 6x + 4$ es una función polinómica por tanto derivable en $\Re$ todas las veces que nos haga falta.
Como hay que hallar la recta tangente en su máximo relativo. Sabemos que si x = a es el máximo relativo de f(x) verifica que f '(a) = 0 y además f '(a) < 0.
$f'(x) = 6x^2 - 6$
f ' (x) = 0, nos dá $6x^2 - 6 = 0$, de donde $x^2 = 1$ y $x = \pm 1$. Que son los posibles máximo o mínimos relativos de f(x).
$f''(x) = 12x$
Como f ''(-1) = 12(-1) = - 12 < 0, x = - 1 es el mínimo relativo buscado.
La recta tangente en x = - 1 es y – f(-1) = 0.(x – 1) = 0 porque f '(-1) = 0
$f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) + 4 = 8$, luego la recta tangente es y – 8 = 0, es decir y = 8.

Para calcular el área encerrada por f(x) y la recta y = 8, tenemos que calcular los puntos donde coinciden es decir las soluciones de la ecuación f(x) = 8

$2x^3 - 6x + 4 = 8$, $2x^3 - 6x - 4 = 0$. Le aplicamos la regla de Ruffini

	2	0	-6	-4
-1		-2	2	4
	2	-2	-4	0

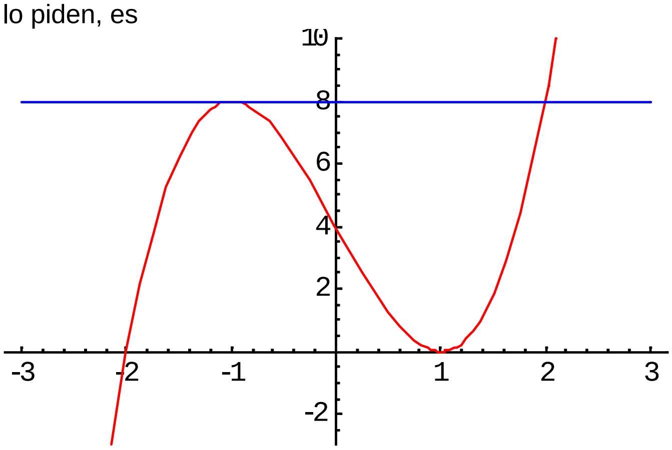
Luego –1 es una raíz y $2x^3 - 6x - 4 = (x + 1).(2x^2 - 2x^2 - 4) = 0$, de donde
x +1 = 0. Y su solución es x = -1

$2x^2 - 2x^2 - 4 = 0$, y sus soluciones son $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$, es decir x = 2 y x = -1.

La función f(x) y la recta tantgente y = 8 se cortan en x = - 1 y x = 2, por tanto el área pedida es

Área = $\int_{-1}^{2}[8-(2x^3-6x+4)]dx = \left[8x - x^4/2 + 3x^2 - 4x\right]_{-1}^{2}$ = (-8+12+8) – (-1/2 +3-4) = 27/2 unidades de área

Gráficamente, aunque no lo piden, es



Ejercicio 2 de la Opción A del modelo 6 de 2003.

Dada la función *f* definida para $x \neq -1$ por $f(x) = x^3/(1 + x)^2$, determina:
(a) [1'5 puntos] Las asíntotas de la gráfica de *f*.
(b) [1 punto] Los puntos de corte, si existen, de dicha gráfica con sus asíntotas.

Solución

(a)

Como $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \dfrac{-1}{0^+}$ = - ∞, x = - 1 es una asíntota vertical (A.V.) de f(x)

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty.$$

Como es una cociente de polinomios con el numerador de un grado mas que el denominador tiene una asíntota oblicua (A.O.) del tipo y = mx + n, y es la misma en + ∞ y en - ∞.

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^3}{x.(1+x)^2}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^3}{1+2x+x^2} - x\right] = -2$$

Luego la asíntota oblicua es y = mx + n = x – 2

Tambien se puede obtener dividiendo, y la asíntota es el cociente de la división

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} -x^3-2x^2-2 & x-2 \\ \cline{1-1} -2x^2 - x & \\ +2x^2+4x+2 & \\ \cline{1-1} 3x+2 & \end{array}$$

Veamos la posición relativa de f(x) respecto de la A.O.

Como $\lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^3}{(1+x)^2} - (x-2)\right] = 0^+$, f(x) está por encima de la A.O. en + ∞.

Como $\lim_{x\to -\infty} \left[\frac{x^3}{(1+x)^2} - (x-2)\right] = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.O. en - ∞.

(b)

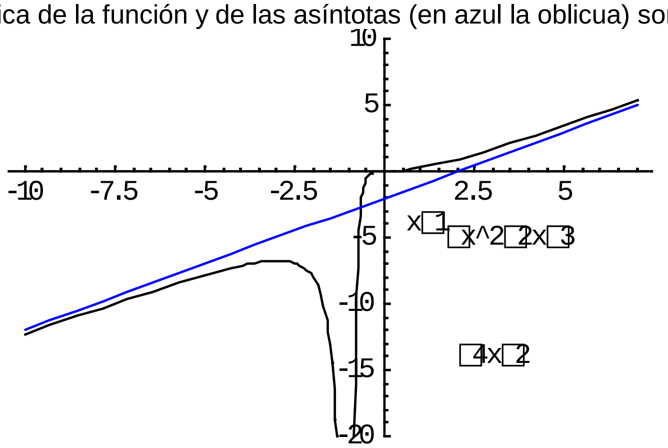
Para hallar los puntos de corte de f(x) con la asíntota igualamos la función con la asíntota y vemos si tiene soluciones. Con las asíntotas verticales no hay corte, solo con la oblicua.

Igualando tenemos

$x^3/(1+x)^2 = x - 2$

$x^3 = (1+x)^2 .(x - 2) = x^3 - 3x - 2$. Simplificando x^3 tenemos x = -2/3, con lo cual f(x) y la asíntota se cortan en el punto (-2/3, -8/3).

Aunque no lo piden la gráfica de la función y de las asíntotas (en azul la oblicua) son:



Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 6 de 2003.

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a) [0'75 puntos] ¿Para qué valores de *m* existe la matriz A^{-1}?

(b) [1 punto] Siendo *m* = 2, calcula A^{-1}y resuelve el sistema A.X = *B*.

(c) [0'75 puntos] Resuelve el sistema A.X = *B* para *m* = 1.

Solución

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a) para que exista A^{-1} su determinante tiene que ser siatinto de cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = 1.(-m^2 - 3) - 0 + (-1).(-4m) = -m^2 + 4m - 3$$

$-m^2 + 4m - 3 = 0 \rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0$, y resolviendo la ecuación tenemos m = 3 y m = 1. Luego si $m \neq 3$ y $m \neq 1$ existe A^{-1}.

(b)

Si m = 2, existe A^1 y es $A^{-1} = (1/|A|).[Adj(A)]^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1;\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (1/|A|).[Adj(A)]^t = (1/1).\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A.X = B, multiplicamos por la izquierda por A^1

A^{-1} . A.X = A^{-1} . B, operando tenemos I.X = A^{-1} . B, de donde

$$X = A^{-1}.\ B = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(c)

Resuelve A.X = B con m = 1

Si m = 1 no existe A^{-1}. Veamos si el sistema es compatible

La matriz de lkos coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, rango($A^*$) = 2

Como rango(A) = 2 = rango(A^*), por el teorema de Rouche el sistema es compatiblke e indeterminado. Tiene dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Nos quedamos con las dos primeras ecuaciones del sistema

x – y = 1

y + 3z = 1. Tomamos z = λ, y operando tenemos y = 1 – 3λ, x = 1 + λ.

La solución del sistema es (x,y,z) = (1 + λ, 1 – 3λ, λ) con $\lambda \in \Re$

Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 6 de 2003.

Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + 1 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + az + 2 = 0 \end{cases}$.

(a) [1'25 puntos] Halla el valor de *a* sabiendo que la recta está contenida en el plano.

(b) [1'25 puntos] Calcula el ángulo formado por el plano π y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$

Solución

(a)

$\pi \equiv x - 2y + 1 = 0$, $r \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + az + 2 = 0 \end{cases}$.

Para que $r \in \pi$, rango (A) = rango(A^*) = 2,siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ la matriz de loscoeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por el plano π y las dos ecuaciones de la recta r.

En A para que tenga rango 2, |A| = 0

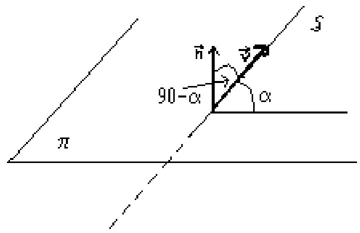
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 1(-3a+1)+2(a-1) = -a-1 = 0. \text{ Luego } a = -1$$

Veamos que efectivamente A y A^* tienen rango2 con a =-1

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \{2^aF+1^a(-1);3^aF+1^a(-1)\} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.(0) = 0$, rango($A^*$) = 2.

(b)



El ángulo formado por s y π ,α, es el complementario del menor de los ángulos que forman el vector director de s, **v**, con el vector normal de π, **n**.

De $\pi \equiv x - 2y + 1 = 0$, **n** = (1,-2,0)

De $s \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$, **v** = (1,-3,1)x((1,-1,1) = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ =**i**(-2) **–j**(0) + **k**(2) = (-2,0,2)

$$|\cos(90 - \alpha)| = |\text{sen}(\alpha)| = \left|\frac{\vec{n}\bullet\vec{v}}{||\vec{n}||\,.\,||\vec{v}||}\right| = \left|\frac{-2}{\sqrt{1+4+1}.\sqrt{4+0+4}}\right| = \frac{2}{\sqrt{5}.\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{40}} = 0, \text{ luego } \alpha = \text{arsen}\left(\frac{2}{\sqrt{40}}\right) \cong$$

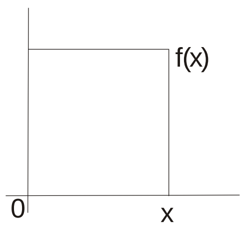
$\cong$ 18’434949º, es decir el ángulo que forman la recta y el plano es 18’434949º.

Ejercicio 1 de la Opción B del modelo 6 de 2003.

[2’5 puntos] De entre todos los rectángulos que tienen uno de sus vértices en el origen de coordenadas, el opuesto de este vértice en la curva $y = 2x^2/(x^2 - 1)$ con (x > 1), uno de sus lados situado sobre el semieje positivo de abscisas y otro lado sobre el semieje positivo de ordenadas, halla el que tiene área mínima.

Solución

La figura sería



con $f(x) = 2x^2/(x^2 - 1)$ y (x > 1).

El área del rectángulo es base por altura, es decir

$A(x) = x.f(x) = 2x^3/(x^2 - 1)$

Calculamos A’(x), la igualamos a cero para ver los posibles máximos o mínimos y después comprobamos en A’’(x)

$A'(x) = [6x^2(x^2-1) - 2x^3(2x)] / (x^2 - 1)^2 = (2x^4 - 6x^2) / (x^2 - 1)^2$

A’(x) = 0 implica $(2x^4 - 6x^2) = 0 = 2x^2(x^2 - 3)$. Por tanto las soluciones son x = 0, $x = +\sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$.

Como el problema dice que x > 1, están descartadas las soluciones x = 0 y $x = -\sqrt{3}$

Veamos que es un mínimo comprobando que $A''(\sqrt{3}) > 0$

$A''(x) = [(8x^3 - 12x)(x^2 - 1)^2 - (2x^4 - 6x^2)(2)(x^2 - 1)(2x)] / (x^2 - 1)^4$

$A''(\sqrt{3}) = [(8(\sqrt{3})^3 - 12(\sqrt{3}))$(nº positivo) – 0] / (nº positivo) > 0 , luego $x = +\sqrt{3}$ es un mínimo.

Las dimensiones del rectángulo pedido son x = = $+\sqrt{3}$ e $y = f(\sqrt{3}) = 2(\sqrt{3})^2 /((\sqrt{3})^2 - 1) = 3$.

Ejercicio 2 de la Opción B del modelo 6 de 2003.

Considera las funciones f, g : $\Re \rightarrow \Re$ definidas por $f(x) = 6 - x^2$ y g(x) = |x|.

(a) [0’75 puntos] Dibuja el recinto acotado que está limitado por las gráficas de *f* y *g*.

(b) [1’75 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

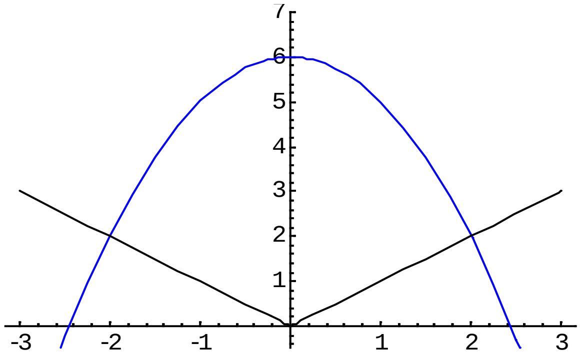
Solución

(a) $f(x) = 6 - x^2$, $g(x) = |x|$, $x \in \Re$

La gráfica sde $6 - x^2$ es la misma que la de $- x^2$ pero desplazada 6 unidades hacia arriba en ordenadas.

La gráfica de $|x| = \begin{cases} +x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$, es la de dos rectas

La gráfica encerrada por ambas funciones es



(b) Para calcular el área tenemos que calcular los puntos de corte de ambas funciones, resolviendo la ecuación f(x) = g(x).

En nuestro caso $6 - x^2 = x \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow$ resolviendo esta ecuación nos queda x = 2 y x = -3, como estamos en la parte positiva del eje de abcisas solo vale x = 2.

Análogamente resolviendo $6 - x^2 = -x$ nos queda x = - 2 y x = 3. En este casso como estamos en la parte negativa sólo nos vale x = - 2.

Área = $\int_{-2}^{+2} [(6 - x^2) - |x|]\, dx = 2\cdot \int_{0}^{+2} [(6 - x^2) - x]\, dx = 2\cdot \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-0}^{+2} = 2[12 - 8/3 - 2] = 44/3$ u.a.

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 6 de 2003.

[2'5 puntos] Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, *A*, *B* y *C*. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala *A* hubieran asistido a la sala *B* y los de la sala *B* a la sala *A*, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.

Solución

Sea x = nº de espectadores de la sala A

y = nº de espectadores de la sala B

z = nº de espectadores de la sala C

Las relaciones que me han dado conducen al siguiente sistema

x + y + z = 200

3x+4y+5z = 720

3y+4x+5z = 720.

Si a la 2ª ecuación le sumamos la 1ª multiplicada por –3, y a la 3ª le sumamos la 1ª multiplicada por –4 obtenemos el siguiente sistema equivalente

x + y + z = 200

y+2z = 120

-y+z = - 60 .

Si a la 3ª ecuación le sumamos la 2ª multiplicada por 1, obtenemos el siguiente sistema equivalente

x + y + z = 200

y+2z = 120

3z = 60 .

Resolviéndolo obtenomos z = 20, y = 120 –2(20) = 80, x = 200 – 80 – 20 = 100, luego la solucion del sistema es (x,y,z) = (100, 80, 20), es decir:

nº de espectadores de la sala A = 100

nº de espectadores de la sala B = 80

nº de espectadores de la sala C = 20

Ejercicio 4 de la Opción B del modelo 6 de 2003.

[2'5 puntos] Halla la ecuación de una circunferencia que pase por el punto (-1,-8) y sea tangente a los ejes coordenados.

Solución

La ecuación de la circunferencia de centro C(a,b) y radio r es $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Como dicen que es tangente a los ejes coordenados el radio r es la distancia del cnetroC a cada uno de los ejes coordenados, es decir

r = d(C,eje OX) = d(C,eje OY)
La ecuación de la recta del eje OX es y = 0
La ecuación de la recta del eje OY es x = 0
Por tanto r = d(C,eje OX) = d(C,y = 0) = |b|
r = d(C,eje OY) = d(C,x = 0) = |a|
Igualando tenmos |a| = |b|, de donde a = b o a = -b

Si tomamos r = a = b, e imponemos la condición de que (-1,-8) es un punto de la circunferencia
$(x – a)^2 + (y – a)^2 = a^2$ obtenemos
$(-1 – a)^2 + (-8 – a)^2 = a^2$. Operando tenemos $a^2 + 18a + 65 =0$
Resolviendo la ecuación $a^2 + 18a + 65 =0$ obtenemos a = - 5 y a = - 13, por tanto hay dos circunferencias posibles, una de centro (-5, -5) y radio 5, y otra de centro (-13, -13) y radio 13

Si tomamos r = a = - b, e imponemos la condición de que (-1,-8) es un punto de la circunferencia
$(x – a)^2 + (y + a)^2 = a^2$ obtenemos
$(-1 – a)^2 + (-8 + a)^2 = a^2$. Operando tenemos $a^2 - 14a + 65 =0$, que no tiene soluciones reales

Por tanto las circunferencias pedidas son
$(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 5^2$ y $(x + 13)^2 + (y + 13)^2 = 13^2$

Aunque no lo piden las gráficas son: